Мастер-класс для учителей математики

«Решение задач ЕГЭ профильного уровня»

Результаты государственной (итоговой) аттестации во многом зависит от предварительной подготовки к этому ответственному периоду.

Можно выделить следующие составляющие готовности учащихся к даче экзаменов в форме ЕГЭ:

- информационная готовность (знания о правилах поведения на экзамене/ правилах заполнения бланков т.д.),

- предметная готовность (качество подготовки по предмету, умение выполнять задания КИМов),

- психологическая подготовка (внутренняя настроенность на определенное поведение, ориентированность на целесообразные действия, актуализация и использование возможностей личности для успешных действий в ситуации сдачи экзамена).

Информационная работа с учащимися состоит в знакомстве с правилами поведения на экзамене, правилами заполнения бланков.

Самый важный этап – практический. На этом этапе учитель-предметник:

- знакомит учащихся с процедурой проведения ЕГЭ по данному предмету;

- знакомит учащихся со структурой и содержанием КИМов;

- проводит работу по КИМам;

- индивидуализирует процесс обучения (разноуровневое обучение);

- развивает навыки самоанализа и самоконтроля.

Диагностика уровня остаточных знаний и степени усвоения программного материала проводится по административным тренировочно-диагностическим работам.

В нашем лицее организованна система разноуровневого обучения и обобщающего повторения по математике. Данный метод обеспечивает достижение следующих результатов:

- повышение уровня обученности учащихся и качества знаний;

- установление уровня остаточных знаний по основным темам курса алгебры и начала анализа, изученным на данный момент времени (для последующей корректировки поурочных планов учителем).

Для организации разноуровневого обучения и обобщающего повторения обычно класс делится на несколько групп:

1 группа – группа «риска» - учащиеся, которые могут не набрать минимального количества баллов;

2 группа – учащиеся, которые при добросовестном отношении могут набрать минимальное количество баллов;

3 группу- учащиеся, претендующие на высокие баллы.

Учитывая степень мотивации каждой группы, учитель планирует работу по подготовке к ЕГЭ как в урочное, так и во внеурочное время. Организуются дополнительные занятия для слабоуспевающих учащихся, спецкурсы по решению задач повышенной трудности – для учащихся, претендующих на высокие баллы.

Учитель разрабатывает задания для каждой группы учащихся: пока группа «сильных» учащихся выполняет задания повышенного уровня, остальные учащиеся под руководством учителя разбирают задания базового уровня. Во второй части урока слабоуспевающие учащиеся работают самостоятельно, в то время как сильными учениками рассматриваются и анализируются выполненные задания.

Подготовка к профильному ЕГЭ по математике

1. Входной тест.
2. Корни, степени и логарифмы.
3. Корни, степени и логарифмы. Часть 2.
4. Графики функций.
5. Графики функций. Часть 2.
6. Планиметрия.
7. Планиметрия. Часть 2.
8. Неравенства.

9. Неравенства. Часть 2.
10. Тригонометрия.
11. Тригонометрия. Часть 2.
12. Стереометрия.
13. Стереометрия. Часть 2.
14. Теория вероятностей.
15. Теория вероятностей. Часть 2.
16. Производная.
17. Производная. Часть 2.
18. Текстовые задачи.
19. Текстовые задачи. Часть 2.
20. Экономические задачи.
21. Экономические задачи. Часть 2.
22. Векторы.
23. Векторы. Часть 2.
24. Повторение / Задачи с параметрами.
25. Повторение / Задачи с параметрами. Часть 2.
26. Повторение / Задачи про числа.
27. Повторение / Задачи про числа. Часть 2.

Урок 8. Неравенства.

В задании 15 профильного ЕГЭ по математике требуется решить неравенство. Как правило, это показательное или логарифмическое неравенство, однако иногда встречаются и другие типы неравенств.
В этом уроке мы будем заниматься решением неравенств.

Показательные неравенства

Показательными неравенствами называются неравенства, одна или обе части которых содержат показательные выражения, то есть выражения, содержащие переменную в показателе степени. Общие методы решения показательных неравенств не отличаются от общих методов решения других неравенств: это равносильные преобразования, метод введения новой переменной, метод интервалов и др. Разумеется, при решении показательных неравенств надо пользоваться свойствами степени с действительным показателем.

Как правило, решение показательных неравенств сводится к решению п ростейших показательных неравенств, то есть неравенств вида $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x)}$,
где вместо $\geqslant$ может стоять любой из знаков $\leqslant$, $>$ или $<$, а какая-
то из функций f(x) или g(x) может быть постоянной.

Пользуясь тем, что функция a^t возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$, получаем, что показательное неравенство $a^{f(x)} \geqslant a^{g(x}$ равносильно неравенству $f(x) \geqslant g(x)$ при $a>1$ и равносильно неравенству $f(x) \leqslant g(x)$ при $0<a<1$, то есть зна к неравенства сохраняется при $a>1$ и заменяется противоположным при $0<a<$ 1. Аналогично решаются простейшие показательные неравенства с другими знаками: $\leqslant$, $>$ или $<$.
Разберём следующий пример.

Пример.
Решите неравенство $3^{x+1}+10^x>10^{x-1}+4\cdot 3^x+3^{x+2}$.

Решение.

Перепишем данное неравенство в виде

$$3^{x+1}+10^x-10^{x-1}-4\cdot 3^x-3^{x+2}>0.$$

Перегруппируем слагаемые в левой части получившегося неравенства:

$$\left(3^{x+1}-4\cdot 3^x-3^{x+2}\right)+\left(10^x-10^{x-1}\right)>0.$$

Вынесем за скобки общий множитель:

$$3^x\cdot\left(3-4-3^2\right)+10^{x-1}(10-1)>0,$$

откуда $-10\cdot 3^x+10^{x-1}\cdot 9>0$. Следовательно,

$$10^{x-1}\cdot 9>10\cdot 3^x;\qquad \frac{10^{x-1}}{10}>\frac{3^x}{9};\qquad 10^{x-2}>3^{x-2}.$$

Выражение 3^{x-2} принимает положительные значения при любом значении x, поэтому на него можно разделить:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^{x-2}>1;\qquad x-2>0;\qquad x>2.$$

Ответ: $(2;+\infty)$.

Пример.
Решите неравенство $0{,}04^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 10^{x^2} + 0{,}08^x$.

Решение.

Используя свойства степеней, перепишем неравенство в виде

$$0{,}04^x \cdot 2^{x^2} + 5^{x^2} \cdot 2^x \leqslant 5^{x^2} \cdot 2^{x^2} + 0{,}04^x \cdot 2^x.$$

Перенесём слагаемые из правой части неравенства в его левую часть и выполним группировку:

$$\left(0{,}04^x \cdot 2^{x^2} - 0{,}04^x \cdot 2^x\right) + \left(5^{x^2} \cdot 2^x - 5^{x^2} \cdot 2^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Вынесем за скобки общие множители:

$$0{,}04^x \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) + 5^{x^2} \cdot \left(2^x - 2^{x^2}\right) \leqslant 0,$$

откуда

$$0{,}04^x \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) - 5^{x^2} \cdot \left(2^{x^2} - 2^x\right) \leqslant 0.$$

Ещё раз вынесем за скобки общий множитель:

$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left(0{,}04^x - 5^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Приведя уменьшаемое во вторых скобках к основанию 5, получим

$$\left(2^{x^2} - 2^x\right)\left(5^{-2x} - 5^{x^2}\right) \leqslant 0.$$

Значение выражения $2^{x^2} - 2^x$ положительно при $x > 1$ и $x < 0$, равно нулю при $x = 1$ и $x = 0$ и отрицательно при $0 < x < 1$. Значение выражения $5^{-2x} - 5^{x^2}$ положительно при $-2 < x < 0$, равно нулю при $x = -2$ и $x = 0$ и отрицательно при $x < -2$ и $x > 0$. Таким образом, решение получившегося неравенства $x \leqslant -2$; $x = 0$; $x \geqslant 1$.

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Часто для упрощения решения неравенства удобно воспользоваться заменой переменной.

Пример.
Решите неравенство $3 \cdot 9^{x^2-1} - 12 \cdot 3^{x^2-2} + 1 \geqslant 0$.

Наконец, разберём примеры, где для решения неравенства нужно воспользоваться свойствами показательной функции.

Пример.
Решите неравенство $3^{x-4} + 4^{x-5} + 5^{x-6} < 14$.

Решение.

Пусть $f(x) = 3^{x-4} + 4^{x-5} + 5^{x-6}$. Функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой как сумма возрастающих функций. Поскольку $f(6) = 14$, неравенство $f(x) < 14$ будет выполнено при всех $x < 6$ и только при этих значениях переменной.

Ответ: $(-\infty; 6)$.

Логарифмические неравенства

Логарифмическими неравенствами называются неравенства, одна или обе части которых содержат логарифмические выражения. Общие методы решения логарифмических неравенств не отличаются от общих методов решения других неравенств, однако дополнительная сложность при решении логарифмических неравенств возникает в связи с тем, что логарифм определён только для положительных чисел, а основание логарифма не только должно быть положительным, но и не должно равняться единице.

Разберём несколько примеров решения логарифмических неравенств.

Пример.
Решите неравенство $\lg(x-5) + \lg(x-20) \leqslant 2$.

Пример.
Решите неравенство $9\log_{12}\left(x^2 - 3x - 4\right) \leqslant 10 + \log_{12}\dfrac{(x+1)^9}{x-4}$.

Как и в показательных неравенствах, в логарифмических неравенствах бывает удобно воспользоваться заменой переменной.

Пример.
Решите неравенство $\dfrac{4\lg(2x-1) - 1}{\lg(2x-1) - 1} \leqslant 1$.

Пример.

Решите неравенство $\dfrac{45}{\left(\log_2^2 x-2\log_2 x\right)^2}-\dfrac{18}{\log_2^2 x-2\log_2 x}+1<0.$

Решение.

Пусть $t=\log_2^2 x-2\log_2 x$. Тогда исходное неравенство принимает вид:

$$\frac{45}{t^2}-\frac{18}{t}+1<0; \qquad \frac{t^2-18t+45}{t^2}<0; \qquad \frac{(t-3)(t-15)}{t^2}<0,$$

откуда $3<t<15$. Таким образом, получаем

$$3<\log_2^2 x-2\log_2 x<15; \qquad \begin{cases}\log_2^2 x-2\log_2 x-15<0,\\ \log_2^2 x-2\log_2 x-3>0;\end{cases} \qquad \begin{cases}(\log_2 x-5)(\log_2 x+3)<0,\\ (\log_2 x-3)(\log_2 x+1)>0,\end{cases}$$

откуда $-3<\log_2 x<-1$ или $3<\log_2 x<5$.

При $-3<\log_2 x<-1$ получаем $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}$.

При $3<\log_2 x<5$ получаем $8<x<32$.

Таким образом, исходная система имеет решения $\frac{1}{8}<x<\frac{1}{2}; 8<x<32$.

Ответ: $\left(\frac{1}{8};\frac{1}{2}\right)\cup(8;32)$.

Все задания решает учитель с подробным объяснением у доски с вопросами учащихся.

Далее ученики решают в классе у доски следующие задания по теме.

Урок 4. Классная работа.

Задача 1. Решите неравенство $\dfrac{9^x-3^{x+2}+20}{3^x-3}+\dfrac{9^x-3^{x+2}+1}{3^x-9}\leqslant 2\cdot 3^x-6.$

Задача 2. Решите неравенство $\dfrac{4^x-2^{x+1}+1}{4^x-3\cdot 2^x+2}\leqslant\dfrac{2^x-3}{2^x-2}+\dfrac{1}{2^x-9}.$

Задача 3. Решите неравенство $\log_2(24-8x)\geqslant\log_2\left(x^2-9x+18\right)+\log_2(x+3).$

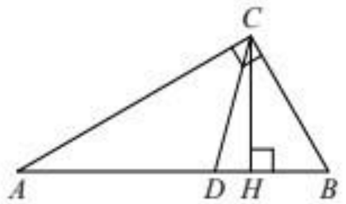
Задача 4. Решите неравенство $\dfrac{7\log_2(4x)-78}{\log_2^2 x-\log_2 x^9}\leqslant 1.$

Задача 5. Решите неравенство $(x-6)\cdot\log_{x+3}(x+1)\cdot\log_9(x+3)^2\leqslant 0.$

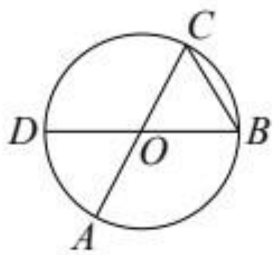
И, наконец, ученикам предлагается домашняя работа

Урок 4. Домашняя работа.

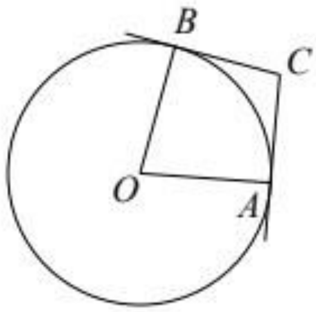
Задача 1. Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен $49°$. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Задача 2. Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O. Угол ACB равен $53°$. Найдите угол AOD. Ответ дайте в градусах.



Задача 3. Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Угол CAB равен $23°$. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.

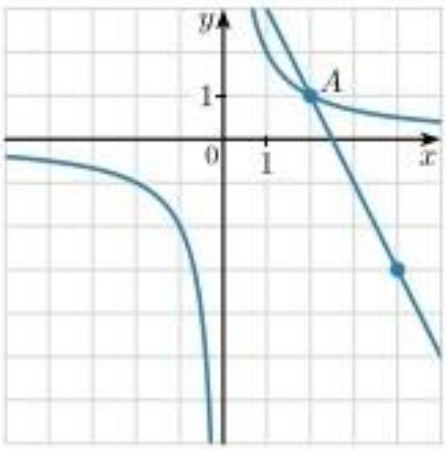


Задача 4. Найдите корень уравнения $\log_2(9-x)=7$.

Задача 5. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\right)^2}{11+\sqrt{21}}$.

Задача 6. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0=360$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f выше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\dfrac{f_0}{1-\frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 15 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c=300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Задача 7. На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=\dfrac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, пересекающиеся в точках A и B.
Найдите абсциссу точки B.



Задача 8. Решите неравенство $3^x-8-\dfrac{5\cdot 3^x-17}{9^x-5\cdot 3^x+6}\leqslant\dfrac{2}{3^x-3}$.

Задача 9. Решите неравенство $\log_4(28-4x)>\log_4\left(x^2-8x+7\right)+\log_4(x+3)$.

Домашняя работа проверяется учителем вместе с учениками, проводится анализ и разбор всех заданий. Затем проводится контрольная работа по данным темам.

Учитель математики МОБУ «Лицей Соль-Илецкого городского округа»
Мукашев МК